

BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR

SERVICES INFORMATIQUES

AUX ORGANISATIONS

SESSION 2013

SUJET

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Sous épreuve E21 – Mathématiques
Épreuve obligatoire

Durée : 2 heures

coefficient : 2

Calculatrice autorisée, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :

« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.

Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Il comprend 4 pages numérotées de la page 1/4 à 4/4.

Exercice 1 (5 points)

Pour obtenir un diplôme, des étudiants doivent valider quatre modules différents notés A, B, C et D. Les modules nécessitent certaines connaissances et doivent donc être validés en respectant les règles suivantes :

- une fois le module A validé, on peut valider les modules B, C ou D ;
- une fois le module B validé, on peut valider le module D ;
- une fois le module C validé, on peut valider les modules B ou D ;
- aucun module ne peut être validé après le module D.

On définit ainsi un graphe orienté de sommets A, B, C et D, pris dans cet ordre, et dont la matrice d'adjacence est la matrice M :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi $m_{12} = 1$ signifie que l'on peut valider le module B, le module A ayant été validé.

1. Reproduire et compléter le tableau des prédécesseurs :

Sommets	Prédécesseurs
A	
B	
C	A
D	

2. Déterminer le niveau des sommets de ce graphe. Expliquer la démarche suivie.
3. Donner une représentation géométrique du graphe ordonné par niveaux.
4. Existe-t-il un chemin de longueur 4 entre deux sommets du graphe ? Justifier.
5. a) Déterminer la longueur de chemin maximale qui peut exister entre deux sommets de ce graphe.
b) Donner un tel chemin. Un étudiant qui a suivi un tel parcours a-t-il validé tous les modules ?

Exercice 2 (6 points)

Un petit fournisseur de matériel informatique propose trois formules de vente à ses clients :

- une formule (F1) « clavier + souris » à 12 euros ;
- une formule (F2) « clavier + souris + clé USB » à 16 euros ;
- une formule (F3) « clavier » à 10 euros.

Pour chacune de ces formules, dans le tableau suivant sont indiqués le coût d'achat du matériel, le temps moyen nécessaire au conditionnement de chaque formule et le prix demandé :

	Formule F1	Formule F2	Formule F3
Coût d'achat en euro	3	4	2
Temps en minute	8	10	6
Prix de vente en euro	12	16	10

1. a) On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 8 & 10 & 6 \\ 12 & 16 & 10 \end{pmatrix}$ et la matrice colonne $C = \begin{pmatrix} 10 \\ 8 \\ 14 \end{pmatrix}$.

Effectuer le produit matriciel MC .

- b) On considère le cas où 10 clients optent pour la formule F1, 8 pour la formule F2 et 14 pour la formule F3.

Donner la signification de chacun des coefficients du produit matriciel MC en termes de coût d'achat, de temps et de prix de vente.

2. On considère la matrice $P = \begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 2 & -1,5 & 0,5 \\ -2 & 0 & 0,5 \end{pmatrix}$.

- a) Calculer les coefficients de la première ligne du produit matriciel PM .

- b) Déterminer le réel a tel que le produit matriciel PM soit égal à la matrice unité

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Dans la suite de l'exercice on prend $a = -1$ et l'on admet que, dans ce cas, $PM = I$.

Soient X et Y deux matrices à une colonne et trois lignes.

Démontrer que si $MX = Y$ alors $X = PY$.

4. On sait que le fournisseur a dépensé 100 euros pour l'achat du matériel, que le conditionnement a nécessité 270 minutes et que la recette pour ces trois formules a été de 430 euros.

Déterminer, pour chacune des formules, le nombre de clients l'ayant choisie.

Exercice 3 (9 points)

Des étudiants en informatique étudient la propagation de virus sur le disque d'un ordinateur non connecté à un réseau.

Partie A : un premier virus

À chaque allumage de l'ordinateur, le virus se répand et le nombre de fichiers infectés est déterminé par le terme général de la suite (U_n) définie par son premier terme $U_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul : $U_{n+1} = 1 + 2U_n$ où n est le nombre d'allumages de l'ordinateur.

1. Calculer U_2 , U_3 et U_4 .

Justifier que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2. On considère la suite (V_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par : $V_n = U_n + 1$.

Calculer V_1 , V_2 , V_3 et V_4 .

Quelle conjecture sur la nature de la suite (V_n) peut-on formuler ?

3. a) Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $V_{n+1} = 2V_n$.

b) En déduire une expression de V_n en fonction de n .

4. a) En déduire que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $U_n = 2^n - 1$.

b) À partir de combien d'allumages de l'ordinateur, le nombre de fichiers infectés sera-t-il supérieur à 1000 ?

Partie B : un deuxième virus

L'équipe d'étudiants implante maintenant un virus sur un autre ordinateur. Le nombre de fichiers infectés en fonction du nombre n d'allumages de l'ordinateur est $3^n - 1$.

Par ailleurs, chaque fois que le nombre de fichiers infectés est un multiple de 11, un message d'avertissement s'affiche à l'écran.

Le reste de la division euclidienne de $3^n - 1$ par 11 est noté W_n .

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

n	$3^n - 1$	W_n
1		
2		
3		
4		
5		

2. Démontrer que si n est un multiple de 5, alors $3^n - 1 \equiv 0 \pmod{11}$.

Quelle information peut-on en déduire sur l'apparition du message d'avertissement ?