BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
SERVICES INFORMATIQUES
AUX ORGANISATIONS

SESSION 2014

<u>SUJET</u>

ÉPREUVE E2 – MATHÉMATIQUES POUR L'INFORMATIQUE

Sous épreuve E21 - Mathématiques
Épreuve obligatoire

Durée : 2 heures **coefficient : 2**

<u>Calculatrice autorisée</u>, *conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet. Il comprend 4 pages numérotées de la page 1/4 à 4 /4.

Exercice 1 (6 points)

Les questions 1, 2, 3 sont indépendantes.

1. En informatique, pour coder les lettres de l'alphabet, l'un des premiers codes utilisés a été le code ASCII.
Par exemple le caractère « a » est codé en ASCII par le nombre 97 (en écriture décimale), qui correspond dans le système binaire (ou base deux) au nombre 1100001.

On donne ci-dessous un extrait de la table ASCII, le code étant donné en écriture décimale :

lettre	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
code	97	98	99	100	101	102	103	104	105	106	107	108	109

lettre	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
code	110	111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121	122

a) Déterminer la lettre qui est codée, en ASCII, par le nombre 1101101 écrit en binaire.

b) Écrire en binaire le codage ASCII de la lettre « j ».

2. Pour coder une couleur, on utilise souvent le code RVB. Le principe est de donner pour cette couleur l'intensité de ses trois composantes Rouge, Vert, Bleu en hexadécimal (base seize) ou en écriture décimale (base dix).
Pour l'intensité, on utilise une échelle allant de 00 à FF en hexadécimal, c'est-à-dire de 0 à 255 en écriture décimale.

Par exemple : la couleur « lilas » est codée (A5 ; 44 ; B9) en hexadécimal ou $(165\,;68\,;185)$ en écriture décimale. Ceci signifie qu'en hexadécimal, l'intensité du rouge est A5, celle du vert est 44 et celle du bleu est B9.

a) La couleur « or » est codée en écriture décimale $(255\,;215\,;0)$.
Déterminer son codage en hexadécimal.

b) La couleur « brun » est codée en hexadécimal (5B ; 3C ; 11).
Déterminer son codage en écriture décimale.

3. Pour réaliser certaines applications en assembleur, il faut effectuer des opérations sur les nombres entiers en base deux. Deux telles opérations sont proposées ci-après.

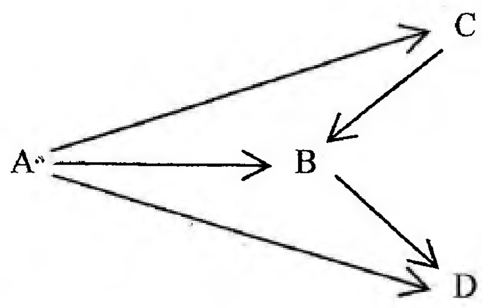
a) 10111 et 1101 sont deux nombres écrits en base deux.
Calculer leur somme en base deux.

b) Le nombre $R = 101\,1101\,0101$ est écrit en base deux.
Écrire le nombre décimal 8 en base deux. Le résultat est noté S.
Déterminer en base deux le produit $R \times S$.

Exercice 2 (6 points)

Au cours d'un stage, un étudiant en BTS SIO a développé un jeu pour téléphone portable.
Le jeu comprend quatre étapes, notées A, B, C, D.

Le joueur commence à l'étape A puis, selon l'indice découvert, passe à une autre étape. Les possibilités de passage d'une étape à l'autre sont données par le graphe orienté G ci-contre, dont les sommets A, B, C, D modélisent les étapes, et les flèches les possibilités de passage d'une étape à une autre.



1. Donner la matrice d'adjacence M de ce graphe orienté, en considérant les quatre sommets A, B, C, D dans cet ordre.

2. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   a) Citer tous les chemins de longueur 2.

   b) Déterminer la matrice M^4 ; cette matrice peut être obtenue à la calculatrice.
   Interpréter le résultat dans le contexte du jeu.

3. Existe-t-il un chemin hamiltonien ? Si oui, le donner.

4. On note $M^{[n]}$ la n-ième puissance booléenne de la matrice M, et $\oplus$ l'addition booléenne de deux matrices.

   a) Déterminer la matrice $M' = M \oplus M^{[2]} \oplus M^{[3]} \oplus M^{[4]}$.

   b) Donner la représentation géométrique du graphe G' dont la matrice d'adjacence est M'.

   c) Interpréter dans le contexte du jeu la dernière ligne de la matrice M'.

Exercice 3 (8 points)

Les trois parties A, B et C sont indépendantes.

Partie A

Dans une société de service informatique, chaque client possède un numéro noté n, où n est un entier naturel non nul.

La notation $a \equiv b\ [k]$ signifie que le nombre a est congru au nombre b modulo k.

- Si $n \equiv 0\ [6]$, alors le client est suivi par le technicien A ;
- si $n \equiv 1\ [6]$ alors le client est suivi par le technicien B ;
- si $n \equiv 2\ [6]$ alors le client est suivi par le technicien C ;
- si $n \equiv 3\ [6]$ alors le client est suivi par le technicien D ;
- dans les autres cas, le client est suivi par le technicien E.

1. Par quel technicien est suivi le client numéro 51 ? Justifier la réponse.

2. Le client numéro 23 est-il suivi par technicien E ? Justifier la réponse.

Partie B

Pour permettre aux clients de la société d'accéder à leurs factures, le service comptable attribue un code à chacun d'entre eux.

Pour tout entier naturel n, le code attribué au client numéro n se calcule avec la formule $x+ny+n^2z$, où x, y et z sont trois nombres que les questions suivantes vont permettre de déterminer.

1. Sachant que le client numéro 1 a pour code le nombre 12, que le client numéro 2 a pour code le nombre 27 et que le client numéro 3 a pour code le nombre 50, écrire un système de trois équations vérifié par les nombres x, y et z.

2. On donne les matrices $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$ et $Y=\begin{pmatrix} 12 \\ 27 \\ 50 \end{pmatrix}$.

Le système précédent s'écrit alors sous la forme matricielle : $M\times X=Y$.
Résoudre ce système revient à déterminer la matrice X, ce que proposent les questions suivantes.

a) Soit $P=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -2{,}5 & 4 & -1{,}5 \\ 0{,}5 & -1 & 0{,}5 \end{pmatrix}$. Calculer le produit matriciel $P\times M$.

b) En déduire que si $M\times X=Y$ alors $X=P\times Y$.

c) Déterminer alors les nombres x, y et z.

Partie C

Dans la société, pour modéliser les critères de recrutement aux postes de conseillers, on définit pour chaque postulant les trois variables booléennes a, b et c, ainsi définies :

- $a=1$ si le postulant a eu un entretien favorable avec le DRH (directeur des ressources humaines), $a=0$ sinon ;
- $b=1$ si le postulant a réussi un concours interne, $b=0$ sinon ;
- $c=1$ si le postulant a été parrainé par un cadre, $c=0$ sinon.

Les critères de recrutement sont définis par l'expression booléenne E suivante :

$$E=a\,c+b\,\overline{c}+a\,b.$$

1. Écrire une phrase traduisant ces critères de recrutement.

2. a) À l'aide d'un diagramme de Karnaugh ou à l'aide d'un calcul booléen, donner une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.

b) Écrire une phrase correspondant à la simplification précédente de l'expression booléenne E.