BREVET DE TECHNICIEN SUPÉRIEUR
SERVICES INFORMATIQUES
AUX ORGANISATIONS

SESSION 2013

SUJET

ÉPREUVE EF2 – MATHÉMATIQUES APPROFONDIES

Sous épreuve EF2 – épreuve facultative

Durée : 2 heures

Calculatrice autorisée*, conformément à la circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 :*
« Toutes les calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables, alphanumériques ou à écran graphique, à condition que leur fonctionnement soit autonome et qu'il ne soit pas fait usage d'imprimante, sont autorisées.
Les échanges de machines entre candidats, la consultation des notices fournies par les constructeurs ainsi que les échanges d'informations par l'intermédiaire des fonctions de transmission des calculatrices sont interdits ».

Dès que le sujet vous est remis, assurez-vous qu'il est complet.

Il comprend 5 pages numérotées de la page 1/5 à la page 5/5.

Page 5/5 à rendre avec la copie.

Exercice 1 (10 points)

Les parties A, B et C de cet exercice sont indépendantes.

Un lycée technologique dispose d'un parc informatique de 300 postes, tous du même type et achetés au même moment.

Partie A

Le service d'intendance de ce lycée conduit une étude sur cinq années du coût de maintenance, exprimé en milliers d'euro, de ce parc informatique. Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau ci-dessous où i est un entier compris entre 1 et 5.

Âge du parc (en années)	n_i	1	2	3	4	5
Coût de maintenance (en milliers d'euro)	y_i	5,4	7,6	9,6	10,7	13

1. Calculer les coordonnées du point moyen du nuage de points associé à la série $(n_i\,;y_i)$.

2. a) Déterminer un arrondi au millième du coefficient de corrélation linéaire de la série $(n_i\,;y_i)$.
   b) Déterminer une équation de la droite de régression de y en n par la méthode des moindres carrés.

3. On suppose que l'évolution du coût de maintenance sur les cinq premières années se poursuit les années suivantes. Estimer le coût de maintenance du parc la huitième année.

Partie B

Au cours d'une journée, un poste du parc informatique du lycée peut fonctionner correctement ou être en panne. On admet que les 300 ordinateurs du lycée qui sont du même type fonctionnent indépendamment les uns des autres.
La probabilité qu'un poste tombe en panne au cours d'une journée est 0,065. On désigne par X la variable aléatoire qui, à une journée choisie au hasard, associe le nombre de postes tombés en panne dans le parc informatique du lycée.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et en préciser les paramètres.
2. Le gestionnaire du parc informatique affirme : « la probabilité qu'aucun poste ne tombe en panne au cours d'une journée est inférieure à 10^{-6} ».
   Cette affirmation est-elle exacte ? Justifier.

3. On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par celle d'une variable aléatoire X_1 suivant une loi normale.
   a) Montrer que cette loi normale a pour moyenne 19,5 et pour écart type 4,3, arrondi au dixième.
   b) Le gestionnaire du parc informatique estime que le lycée peut fonctionner correctement si moins de 20 ordinateurs sont en panne dans une journée.
   Déterminer la probabilité que le lycée puisse fonctionner correctement dans une journée, c'est-à-dire calculer la probabilité $P(X_1 \leq 19{,}5)$.

Partie C

L'entreprise qui fournit le lycée en ordinateurs dispose de stocks suffisamment importants de cartes mère P_1 et de cartes son P_2. Pour réaliser ses ordinateurs, elle doit insérer dans un logement côte à côte suivant la longueur une carte mère P_1 et une carte son P_2.

On appelle dispositif à insérer dans le logement un assemblage d'une carte mère P_1 et d'une carte son P_2. Le cahier des charges précise que la longueur totale du dispositif à insérer dans le logement doit être comprise entre 195 mm et 207 mm.

On désigne par Y_1 la variable aléatoire qui, à chaque carte mère P_1, prélevée au hasard dans le stock, associe sa longueur, exprimée en mm. Cette variable aléatoire Y_1 suit la loi normale de moyenne 150 mm et d'écart-type 4 mm.

On désigne par Y_2 la variable aléatoire qui, à chaque carte son P_2, prélevée au hasard dans le stock, associe sa longueur, exprimée en mm. Cette variable aléatoire Y_2 suit la loi normale de moyenne 52 mm et d'écart-type 3 mm.

La carte mère P_1 et la carte son P_2 à insérer dans le logement pour montage sont choisies au hasard et de manière supposée indépendante. On désigne par Z la variable aléatoire qui, à tout dispositif à insérer dans le logement pris au hasard dans les assemblages, associe sa longueur, exprimée en mm. Ainsi, Z est définie par $Z = Y_1 + Y_2$. On admet que la variable Z suit une loi normale.

1. Montrer que la loi de la variable aléatoire Z a pour moyenne 202 mm et pour écart-type 5 mm.

2. Montrer que la probabilité qu'un dispositif soit conforme au cahier des charges est strictement supérieure à 0,75, c'est-à-dire que : $P(195 \leq Z \leq 207) > 0,75$.

On pourra s'aider si besoin de la table de probabilités ci-dessous.

Table de valeurs, arrondies au dix millième, pour la fonction de répartition de la loi normale de moyenne 202 et d'écart-type 5 :

a	190	191	192	193	194	195	196	197	198	199
$P(Z \leq a)$	0,0082	0,0139	0,0228	0,0359	0,0548	0,0808	0,1151	0,1587	0,2119	0,2743

a	200	201	202	203	204	205	206	207	208	209
$P(Z \leq a)$	0,3446	0,4207	0,5000	0,5793	0,6554	0,7257	0,7881	0,8413	0,8849	0,9192

Exercice 2 (10 points)

La vente d'un objet suit une loi d'offre notée f et une loi de demande notée g.
Les deux fonctions f et g sont définies sur l'intervalle $[0;50]$ par :

$$f(x)=4\ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x)=34-6\ln(x+1),$$

où x désigne le prix de vente unitaire, exprimé en dizaines d'euro, $f(x)$ le nombre d'objets, exprimé en centaines, proposés sur le marché et $g(x)$ le nombre d'objets, exprimé en centaines, que les consommateurs sont prêts à acheter.

Partie A : étude de la fonction g

On note $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ les courbes représentatives respectives des fonctions f et g dans un repère orthogonal.
La courbe $\mathscr{C}_f$ est représentée en annexe.

1. Calculer la dérivée de la fonction g et déterminer le sens de variation de la fonction g sur l'intervalle [0 ; 50].

2. Déterminer une équation de la tangente $\mathscr{D}$ à la courbe $\mathscr{C}_g$ au point d'abscisse 0.

3. **a)** Compléter, sur **l'annexe** à rendre avec la copie, le tableau de valeurs de la fonction g. Les résultats seront arrondis au dixième.

   b) Tracer sur le graphique de l'**annexe** la droite $\mathscr{D}$ et la courbe $\mathscr{C}_g$.

Partie B : étude du prix d'équilibre

On appelle E le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et on note $(a;b)$ ses coordonnées.

1. Lire graphiquement les coordonnées du point E. On fera apparaître les pointillés permettant la lecture.
2. Montrer par le calcul que les valeurs exactes de a et b sont respectivement $e^{3,4}-1$ et 13,6.
3. La valeur a correspond au prix d'équilibre du marché.
   Donner la valeur du prix d'équilibre, arrondi à l'euro.
4. Au niveau économique, la rente du producteur, exprimée en milliers d'euro, est le nombre :

$$P=a\times b-\int_0^a f(x)\,dx.$$

   a) Le nombre P, exprimé en unité d'aire, est l'aire d'une zone du plan ; hachurer une telle zone sur le graphique de l'annexe.
   On remarquera pour cela que le produit $a\times b$ est l'aire d'un rectangle.

   b) Montrer que la fonction H définie sur $[0;50]$ par $H(x)=(x+1)\ln(x+1)-x$ est une primitive de la fonction h définie sur [0 ; 50] par $h(x)=\ln(x+1)$.
   En déduire la valeur exacte de P et sa valeur arrondie à l'unité.

Annexe à rendre avec la copie

Tableau de valeurs de la fonction g :

x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
$g(x)$	34				15,7			12,5			

Courbes représentatives :